

METÓDY URČOVANIA SMEROV HLAVNÝCH MOMENTOV DOSKY

Doc. Ing. Matúš Pavlík, CSc.

Určovanie smerov hlavných (extrémnych) momentov ako aj ich hodnôt v nosných doskových prvkoch, pri ich konkrétnom zaťažení, patrí k základným úlohám inžinierskej praxe. Extrémne momenty umožňujú určiť množstvo výstuže a ich smery určujú uloženie tejto výstuže v doske. Riešenie týchto dvoch úloh je v podstate možné troma postupmi: čisto analyticky alebo čisto experimentálne alebo tiež kombinované, teda analytico-experimentálne. Zatiaľ čo analytický postup predpokladá spoľahlivú znalosť materiálových vlastností dosky /1, 4/, experimentálne postupy sú nezávislé od týchto vstupných údajov /3/, ba môžu slúžiť na overenie hodnovernosti výsledkov získaných analytickým postupom /2, 5/.

V článku je použitý čisto experimentálny postup pri riešení jednej zo spomenutých úloh t.j. určovania smerov hlavných momentov, založený na aplikácii metódy moiré.

Merné ohybové momenty a krútiace momenty izotropnej dosky sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} m_x &= -D(w_{xx} + \mu w_{yy}) \\ m_y &= -D(w_{yy} + \mu w_{xx}) \\ m_{xy} &= -D(1 - \mu)w_{xy} \end{aligned} \quad (1)$$

kde $w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $w_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$; $w_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

pričom $w = w(x, y)$ je funkcia priebyovej plochy dosky.

Smery hlavných ohybových momentov v určitom bode dosky sú definované takto:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \quad (2)$$

Smery hlavných ohybových momentov dosky vyjadrené pomocou krivostí v smeroch X a Y získame, ak dosadíme vzťahy (1) do vzťahu (2). Po úprave vychádza

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = \frac{2w_{xy}}{w_{xx} - w_{yy}} \quad (3)$$

Podľa vzťahu (3) je spojnica bodov s $w_{xy} = 0$ (čiara s nulovými krútiacimi mo-

mentami m_{xy}) izoklínou čiarou, pozdĺž ktorej sú smery hlavných ohybových momentov dosky známe. Tento smer udáva uhol $\alpha_e = 0$ a teda jeden zo smerov hlavných momentov je rovnobežný s čiarami rastra (za predpokladu, že $(w_{xx} - w_{yy}) \neq 0$).

Diferenciálne rovnice vrstevnicových čiar $w_x = \partial w / \partial x = \text{const}$

- interferenčné pruhy moiré $w_x = \text{const}$
a čiar $w_y = \partial w / \partial y = \text{const}$ sú

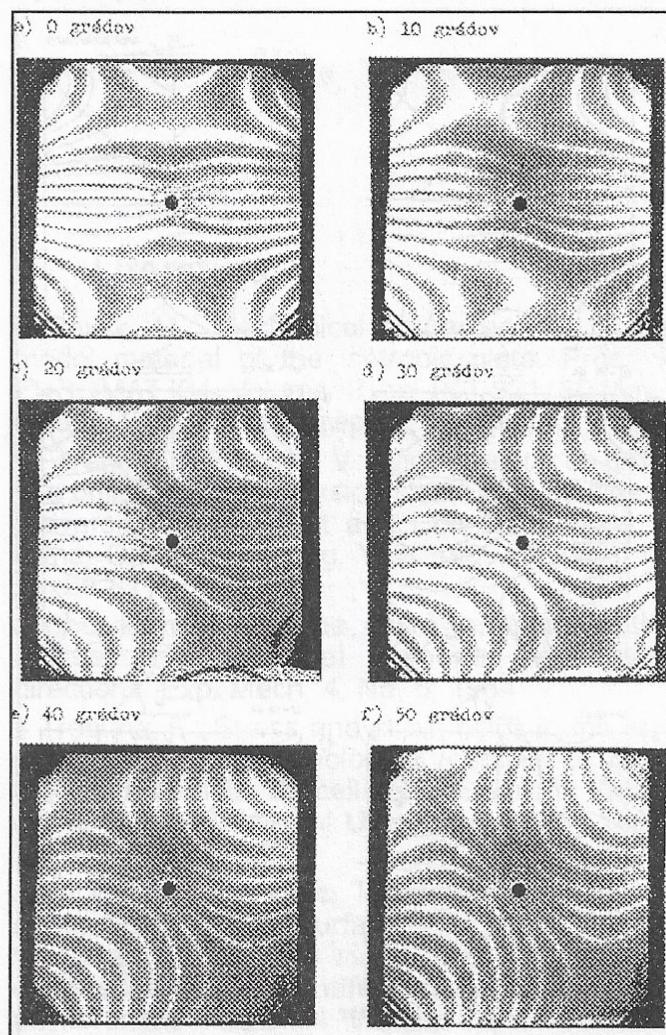
$$\frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial x} dx + \frac{\partial w_y}{\partial y} dy = 0 \quad (4)$$

alebo $w_{xx} = -w_{xy} \operatorname{tg} \alpha$

$$w_{yy} = -w_{yx} \operatorname{cotg} \beta \quad (5)$$

Obr. 1



pričom uhly α a β zvierajú dotyčnice k pruhom moiré $w_x = \text{const}$ a $w_y = \text{const}$ s osou X.

Rovnice (5) možno písat tiež v tvare

$$\begin{aligned} w_{xx} \cos \alpha + w_{xy} \sin \alpha &= 0 \\ w_{yx} \cos \beta + w_{yy} \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Z rovnic (6) môžeme určiť miesta (body) na doske, z obrázkov $w_x = \text{const}$ a $w_y = \text{const}$, v ktorých $w_{xy} = 0$. Čiara $w_{xy} = 0$ prechádza bodmi, v ktorých dotyčnica k pruhom $w_x = \text{const}$ je rovnobežná s osou Y ($\alpha = 90^\circ$) alebo dotyčnica k pruhom $w_y = \text{const}$ je rovnobežná s osou X ($\beta = 0^\circ$).

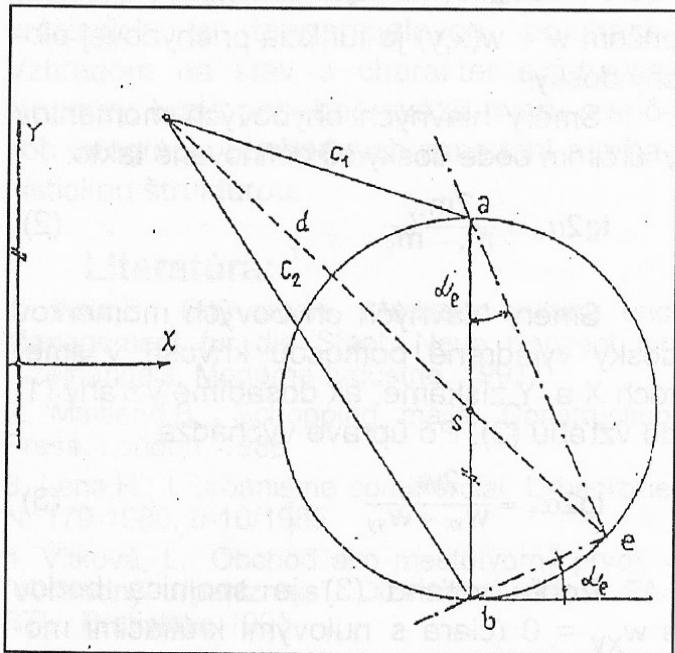
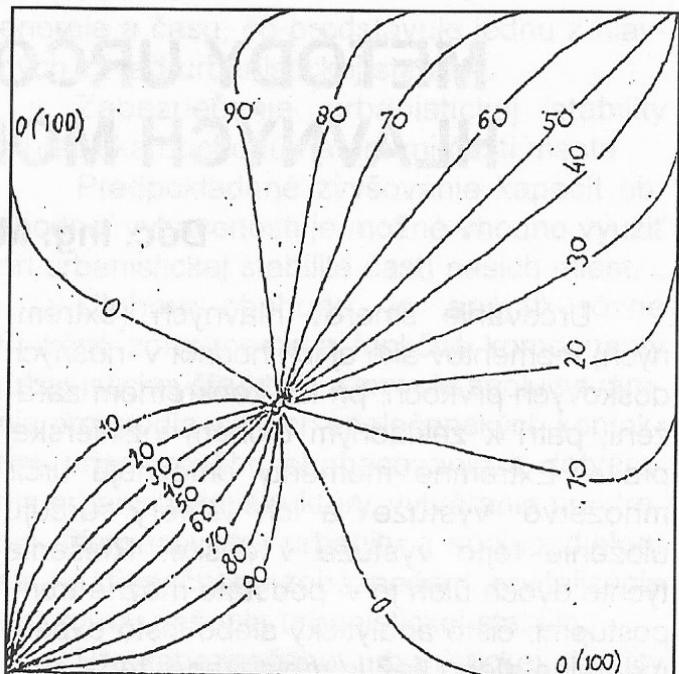
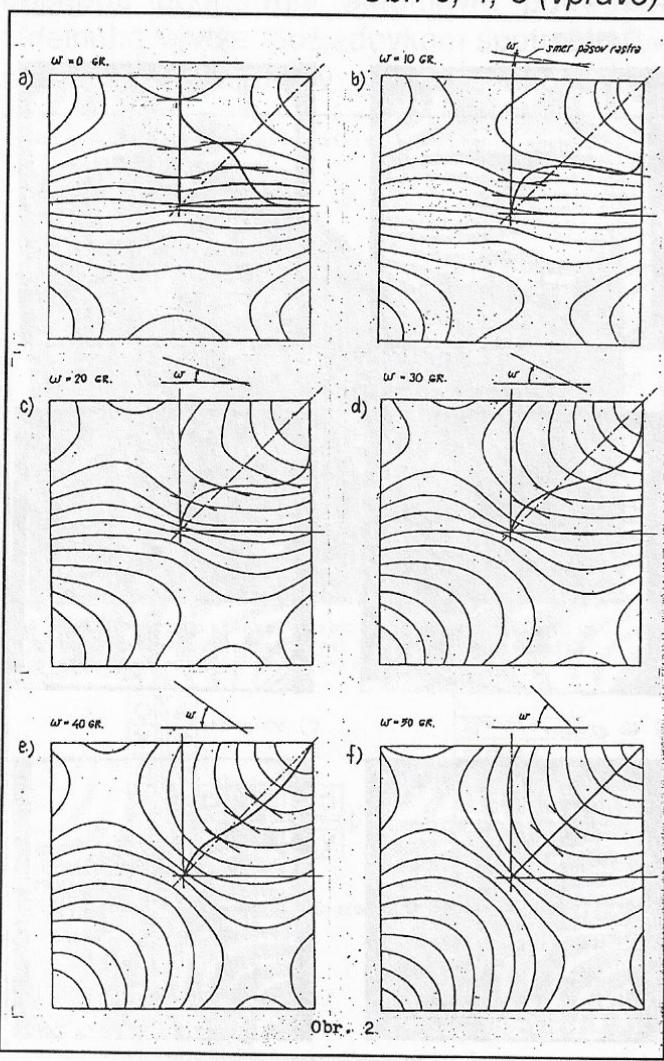
Metóda izoklín

V úvode sme uviedli, ako sa z obrázkov moiré $w_x = \text{const}$ a $w_y = \text{const}$ získajú čiary $w_{xy} = 0$ prípadne $w_{yx} = 0$.

Pre úplnu sústavu izoklín, pomocou ktorých grafickým spôsobom zistíme smery hlavných momentov dosky, treba vyhotoviť obrázky interferenčných pruhov moiré a to pre rôzne polohy pootočených čiar rastra napr. pre uhol $\omega = 0, 10, 20, \dots, 50, \text{ až } 200$

Obr. 2

Obr. 3, 4, 5 (vpravo)



grad. Pre každú fotografiu (obr. 1) boli určené vlastné izoklínky ako spojnice tých bodov dosky, v ktorých hodnota w_{sr} sa rovná nule (obr. 2). Hodnota w_{sr} je nulová v bodoch na fotografii, kde pruhy -čiary- rastra sú tangenty k interferenčným pruhom moiré. Systém osí S a R je pravouhlý a svojím pootočením sleduje uhly ω .

Ak vykreslíme izoklínky zodpovedajúce uhlom ω (obr. 2a až 2f) do jedného obrázka, dostaneme úplny systém izoklín (obr. 3).

Na obr. 3 je vykreslený tento systém iba v jednom kvadrante dosky. Model dosky je štvorcový, podopretý bodove v štyroch rohoch pričom priečne zaťaženie silou F pôsobi v strede dosky.

Z obrázka izoklín boli grafickým spôsobom vyhotovené trajektórie hlavných momentov -izostatické čiary hlavných momentov- a na obr. 4 sú vykreslené tiež iba v jednom kvadrante.

Metóda diskrétnych bodov

Metóda diskrétnych bodov umožňuje nájsť priamo v určitých bodoch smery hlavných momentov použitím jedinej sústavy dvoch fotografií pruhov moiré napr. $w_x = \text{const}$ a $w_y = \text{const}$.

Pri uvážení vzťahov (3) a (5) po úprave dostaneme pre smery hlavných momentov

$$\cot g 2\alpha_e = \frac{1}{2} \left(-\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right) \quad (7)$$

Z porovnania vzťahu (7) s platným vzťahom z trigonometrie

$$\cot g 2\alpha_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_e} - \operatorname{tg} \alpha_e \right) \quad (8)$$

vychádza

$$\operatorname{tg} \alpha_e - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_e} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \quad (9)$$

Grafické riešenie rovnice (9) vzhľadom na α_e , ($\operatorname{tg} \alpha_e$) umožňuje kružnica na obr. 5.

Smery hlavných momentov v určitom bode dosky N, v ktorom sa pretínajú pruhy moiré $w_x = \text{const}$ a $w_y = \text{const}$ dostaneme pomocou pomocného kruhu a jeho vhodne voleného priemeru rovnobežného so smerom osi Y (obr. 5). Z koncových bodov priemeru kruhu viedieme dva lúče a sice, lúč c1

rovnobežný s dotyčnicou k pruhu $w_X = \text{const}$ a lúč c2 kolmý na dotyčnicu k pruhu moiré $w_y = \text{const}$. Priesečník dvoch lúčov c1 a c2 spojíme so stredom kruhu a predĺžime až sa priamka d pretne s obvodom kruhu. Označme tento priesečník písmenom e. Spojnice ae a be sú na seba kolmé a udávajú hľadané smery hlavných momentov dosky v bode N t.j. v bode, kde sa pretínajú čiary $w_X = \text{const}$ a $w_y = \text{const}$.

Ked' pre dostatočne veľký počet bodov zistíme metódou diskrétnych bodov smery hlavných momentov, dostaneme smerové pole, pomocou ktorého sa dajú vykresliť trajektórie.

Metóda diskrétnych bodov nájdzie obzvlášť vhodné použitie, ak treba určiť smery hlavných momentov pre vymedzený počet bodov.

Literatúra

- 1 Pavlík, M.: Mechanical characteristics of the model material of the isotropic plate. Proc. of EUROMAT 94, Volume III, pp. 917-921, 30 May - 1 June 1994, Balatonséplak, Hungary
- 2 Feranec, T.- Feranec, V.: Wind Loading on grouped buildings and Trackside structures. Studies of University of Transport and Communications in Žilina, Civil Engineering, Year 1995, Volume 18, pp. 69-81
- 3 Bouwkamp, J.G.: The moiré method and the evaluation of principal moments and stress directions. Exp. Mech. 4, No. 5, 1964
- 4 Trebuňa, F.: Stress and strain fields in the elements of robototechnological complexes from modern materials. Miscellany of Scientific Works of the Slovak Technical University, Košice 1989, Vol. II, pp. 279-285
- 5 Feranec, V.- Feranec, T.: Interaction effects of structures on their surface pressure fields in simulated atmospheric winds. Third international conference on Traffic effects on structures and environment -TESE 94, Volume II, pp. 105-110